

Contrôle continu de mécanique
L'usage des calculatrices est interdit.
(durée: 45 minutes)

NOM :	Prénom :	Groupe :	Note (/20) :
--------------	-----------------	-----------------	---------------------

Exercice :

Soit un repère cartésien $\mathcal{R}(O, \overset{\mathbf{u}}{e}_x, \overset{\mathbf{u}}{e}_y, \overset{\mathbf{u}}{e}_z)$, considéré comme galiléen. Oz est la verticale ascendante, et on associe à \mathcal{R} , la base cartésienne $\mathcal{B} = (\overset{\mathbf{u}}{e}_x, \overset{\mathbf{u}}{e}_y, \overset{\mathbf{u}}{e}_z)$.

Un manège est constitué par un disque (\mathcal{D}) de rayon R et de centre O , qui tourne uniformément autour de la verticale Oz à la vitesse angulaire ω constante. On note $\mathcal{R}'(O, \overset{\mathbf{u}}{e}_{x'}, \overset{\mathbf{u}}{e}_{y'}, \overset{\mathbf{u}}{e}_z)$ le référentiel lié au manège et $\mathcal{B}' = (\overset{\mathbf{u}}{e}_{x'}, \overset{\mathbf{u}}{e}_{y'}, \overset{\mathbf{u}}{e}_z)$ la base qui lui est associée.

A l'instant initial $t = 0$, un enfant, repéré par le point M , a pour coordonnées cartésiennes $(-R, 0, 0)_{\mathcal{B}'}$. Il se déplace alors suivant un diamètre du manège à vitesse constante v_o par rapport au manège.

1- On se place dans le référentiel \mathcal{R}' lié au manège.

a) Donner l'expression de la vitesse de M par rapport à \mathcal{R}' : $\overset{\mathbf{1}}{v}(M / \mathcal{R}')$.

b) En déduire les équations paramétriques de la trajectoire de l'enfant dans \mathcal{R}' .

c) Quelle est la courbe décrite par l'enfant dans \mathcal{R}' ?

2- Donner l'expression du vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à $\mathcal{R} : \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$.

3- On étudie maintenant la trajectoire dans le référentiel \mathcal{R} .

a) Rappeler la loi de composition des vitesses (on précisera tous les termes introduits).

b) Par application de la loi énoncée en 3-a), déterminer l'expression de la vitesse de M par rapport à $\mathcal{R} : \vec{v}_1(M/\mathcal{R})$. On l'explicitera dans la base \mathcal{B}' .

c) En déduire les équations paramétriques de la trajectoire suivie par l'enfant dans \mathcal{R} .

d) Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire dans \mathcal{R} s'exprime sous la forme $Y = X^2$, dans laquelle on exprimera Y et X en fonction de y , x et des données du problème.

e) On introduit maintenant les coordonnées polaires (ρ, φ) liées à M dans \mathcal{R} .

i) Exprimer ρ et φ en fonction du temps et des données du problème.

ii) En déduire l'équation polaire de la trajectoire.

f) Par application de la loi de composition des accélérations, déterminer, dans la base \mathcal{B}' , l'expression de l'accélération de M par rapport à \mathcal{R} : $a^{\mathcal{I}}(M / \mathcal{R})$.

